Lista 1: Cálculo II

A. Ramos *

August 20, 2018

Abstract

Lista em constante atualização.

1. Funções vetoriais de variável real;
2. Limites, continuidade, derivadas, integração e comprimento de arco para curvas paramétricas;
3. Curvatura, torsão de curvas em $\mathbb{R}^3$.

1 Exercícios

Faça do livro texto, os exercícios correspondentes aos temas desenvolvidos em aula.

2 Exercícios adicionais

2.1 Funções vetoriais de variável real

1. Encontre o domínio de $\overrightarrow{\alpha}(t) = (\ln(t+1), \sqrt{t^2+2t-8})$. *Rpta:* Domínio $[2, \infty)$.
2. Encontre o domínio de $\overrightarrow{\alpha}(t) = (\frac{1+t}{1-t}, (t+2)^{-3/2}, \frac{1}{t-4})$. *Rpta:* Domínio $(-2, \infty) \setminus \{4\}$.
3. Mostre que a trajétoria de $\overrightarrow{\alpha}(t) = t\hat{i} + t^2\hat{j}$, $t \in \mathbb{R}$ é uma parábola.
4. Descreva a trajétoria de $\overrightarrow{\alpha}(t) = (3\cos(t), 3\sin(t), t)$, $t \in \mathbb{R}$. *Rpta:* Hélice.
5. Descreva a trajetória de $\overrightarrow{\alpha}(t) = (t\cos(t), t\sin(t), t)$, $t \in \mathbb{R}$. *Rpta:* A trajetória está contida num cone circular.
6. Descreva a trajetória de $\overrightarrow{\alpha}(t) = (t, t, \sin(t))$, $t \in \mathbb{R}$.
7. Uma partícula encontra-se no primeiro quadrante de $\mathbb{R}^2$. A partícula move-se de forma que a distância à origem é igual à inclinação t da reta que une a origem e a posição da partícula. Encontre uma parametrização do movimento da partícula usando t como parâmetro. *Rpta:* $\overrightarrow{\alpha}(t) = (\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, \frac{t^2}{\sqrt{1+t^2}})$, $t \geq 0$.
8. Defina uma função vetorial em $\mathbb{R}^3$ com domínio $[-2, 2]$ cuja trajetória é o triângulo de vértices $A = (3, 2, -1)$, $B = (2, 0, 1)$ e $C = (1, -2, 1)$.

2.2 Limites, continuidade, derivadas e integração

1. Calcule, se existe, os seguintes limites
   (a) $\lim_{t\to 3} \overrightarrow{\alpha}(t)$ onde $\overrightarrow{\alpha}(t) = (\frac{t^2-2t-3}{t-3}, \frac{t^2-5t+6}{t-3})$. *Rpta:* (4,1).
   (b) $\lim_{t\to 0} \overrightarrow{\alpha}(t)$ onde $\overrightarrow{\alpha}(t) = (\frac{1-\sqrt{1+t}}{1-t}, \frac{t}{t+1}, 1)$. *Rpta:* (0,0,1).
   (c) $\lim_{t\to 0} \overrightarrow{\alpha}(t)$ onde $\overrightarrow{\alpha}(t) = (\frac{\sin 7t}{t}, \frac{\sin 5t}{\sin 3t}, \frac{\tan 3t}{\sin 2t})$. *Rpta:* (7,5/3,3/2).
   (d) $\lim_{t\to 2} \overrightarrow{\alpha}(t)$ onde $\overrightarrow{\alpha}(t) = (\ln t, \sqrt{1+t^2}, \frac{3t}{4-t^2})$. *Rpta:* Não existe.

*Department of Mathematics, Federal University of Paraná, PR, Brazil. Email: albertoramos@ufpr.br.

2. Seja $\mathcal{C}$ uma curva parametrizada por $\overrightarrow{\alpha}(t) = (1-2t, t^2, 2e^{2t-2})$. Encontre a equação da reta tangente a $\mathcal{C}$ no ponto onde $\overrightarrow{\alpha}'(t)$ é paralelo a $\overrightarrow{\alpha}(t)$. *Rpta:* $r: (-1,1,2) + t(-1,1,2)$; $t \in \mathbb{R}$.

3. Sejam as curvas parametrizadas por $\overrightarrow{\alpha}(t) = (e^t, e^{2t}, 1-e^{-t})$ e $\overrightarrow{\beta}(t) = (1-t, \cos t, \sin t)$. Encontre a interseção das trajétorias das curvas e o ângulo da interseção. *Rpta:* Interseção $P = (1,1,0)$; Ângulo $\theta = \pi/2$.

4. Suponha que $\|\overrightarrow{\alpha}(t)\|$ é constante para todo $t \in \mathbb{R}$. Verifique que $\overrightarrow{\alpha}(t) \cdot \overrightarrow{\alpha}'(t) = 0$

5. Encontre os pontos em que a curva $\overrightarrow{\alpha}(t) = (t^2-1, t^2+1, 3t)$ corta o plano $\mathcal{P}: 3x - 2y - z + 7 = 0$. *Rpta:* $P = (3,5,6)$ e $Q = (0,2,3)$.

6. Calcule o produto interno de $\overrightarrow{a}$ e $\overrightarrow{b}$ onde $\overrightarrow{a} = (2,-4,1)$ e $\overrightarrow{b} = \int_0^1 (te^t, t\sinh 2t, 2te^{-2t})dt$. *Rpta:* 0.

7. Considere $\overrightarrow{\alpha}(t) = \overrightarrow{a}\cos(\omega t) + \overrightarrow{b}\sin(\omega t)$, com $t \in \mathbb{R}$. Verifique que

$$\text{(a)} \qquad \overrightarrow{\alpha}(t) \times \frac{d\overrightarrow{\alpha}(t)}{dt} = \omega \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} \qquad \text{e} \qquad \text{(b)} \qquad \frac{d^2\overrightarrow{\alpha}(t)}{dt^2} + \omega^2 \overrightarrow{\alpha}(t) = \overrightarrow{0}.$$

8. Em $\mathbb{R}^3$ considere $\overrightarrow{\alpha}(t)$ uma curva derivável com derivada contínua, não nula. Mostre que
   (a) $\overrightarrow{\alpha}(t)$ tem norma constante se, e somente se $\overrightarrow{\alpha}(t) \cdot \overrightarrow{\alpha}'(t) = 0$.
   (b) $\overrightarrow{\alpha}(t)$ tem direção constante se, e somente se $\overrightarrow{\alpha}(t) \times \overrightarrow{\alpha}'(t) = 0$.

9. Encontre uma equação paramétrica da curva $\mathcal{C}$ definida por a interseção da superfície $z = \sqrt{4-x^2-y^2}$ e $x^2 + y^2 = 2y$. Expresse o comprimento de arco dessa curva como uma integral.
   Rpta: $\overrightarrow{\alpha}(t) = (\pm\sqrt{2t-t^2}, t, \sqrt{4-2t})0$, $t \in [0,2]$ e comprimento de arco $S = \int_0^2 \sqrt{\frac{2+9t}{4t-2t^2}}dt$.

10. Uma partícula se encontra no plano XY seguindo as equações $x(t) = e^{-2t}\cos 3t$ e $y(t) = e^{-2t}\sin 3t$. Encontre o comprimento de arco desde o ponto $t = 0$ até o ponto $t = \pi$. *Rpta:* $S = \sqrt{13}2(1-e^{-2\pi})$.

11. Considere a curva $\mathcal{C}$: $\overrightarrow{\alpha}(t) = (e^t\cos t, e^t\sin t, e^t)$, $t \geq 0$. Reparametrize a curva $\mathcal{C}$ por comprimento de arco.
    Rpta: $\overrightarrow{\beta}(s) = \overrightarrow{\alpha}(t(s)) == (\frac{\sqrt{3}+s}{s}\cos\ln\frac{\sqrt{3}+s}{s}, \frac{\sqrt{3}+s}{s}\sin\ln\frac{\sqrt{3}+s}{s}, \frac{\sqrt{3}+s}{s})$, $s \geq 0$

2.3 Vetor tangente, normal, binormal, curvatura, torção, etc ...

1. Uma partícula realiza um movimento descrito pela curva paramétrica $\overrightarrow{\alpha}(t) = (\cos t, \frac{\sin t}{\sqrt{2}}, \frac{\sin t}{\sqrt{2}})$.
   (a) Encontre os vetores tangentes, normal e binormal em $t = \pi/4$.
   Rpta: $\overrightarrow{T}(t) = (-\sin t, \frac{\cos t}{\sqrt{2}}, \frac{\cos t}{\sqrt{2}})$; $\overrightarrow{N}(t) = (-\cos t, -\frac{\sin t}{\sqrt{2}}, -\frac{\sin t}{\sqrt{2}})$ e $\overrightarrow{B}(t) = (0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$.
   (b) Calcule o plano osculador, retificante e normal para a curva $\overrightarrow{\alpha}(t)$ no ponto $t = \pi/4$.

2. Seja $a > 0$. Considere a interseção da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4a^2$ com o cilindro $(x-a)^2 + y^2 = a^2$.
   (a) Verifique que $\overrightarrow{\alpha}(t) = (a(1+\cos t), a\sin t, 2a\sin(t/2))$ está contido nessa interseção.
   (b) Calcule o vetor tangente $\overrightarrow{T}(t)$ e a curvatura $\kappa(t)$.
   Rpta: $\overrightarrow{T}(t) = \frac{(-\sqrt{2}a\sin t, \sqrt{2}a\cos t, \sqrt{2}a\cos(t/2))}{a\sqrt{3+\cos t}}$ e $\kappa(t) = \frac{\sqrt{13+3\cos t}}{a(3+\cos t)^{3/2}}$.

3. Encontre a reta tangente, o plano normal e o plano osculador da curva paramétrica $\overrightarrow{\alpha}(t) = (e^t\cos t, e^t\sin t, \sqrt{3}e^t)$ no ponto $t = 0$.
   Rpta: reta tangente: $x - 1 = y = \frac{z-\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$; plano normal: $x + y + \sqrt{3}z = 4$; plano osculador: $\sqrt{3}x + \sqrt{3}y + \sqrt{3} = 2z$.

4. Encontre o vetor tangente, o plano normal, o plano osculador e o plano retificante da curva paramétrica $\overrightarrow{\alpha}(t) = (t^2+1, 8t, t^2-3)$ no ponto $t = 1$.
   Rpta: $\overrightarrow{T}(1) = \frac{1}{3\sqrt{2}}(1,4,1)$; plano normal: $x + 4y + z = 32$; plano retificante: $2x - y + 2z = -8$ e plano oscilador: $x - z = 4$.

5. Seja $\mathcal{C}$ uma curva paramétrica definida como $\overrightarrow{\alpha}(t) = (1 - \frac{4t^3}{3}, 1 - 2t^2, t)$. Encontre a equação do plano osculador paralelo ao plano $x + 2 = 0$. no ponto $t = 1$.

   Rpta: Plano: $x = 1$.

6. Se $\overrightarrow{\alpha}(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t, t)$, encontre a equação do plano osculador em $\overrightarrow{\alpha}(0)$.

   Rpta: Plano: $x = 0$.

7. Considere $\overrightarrow{\alpha}(t) = (2\sqrt{at}, 1 - \cos t, 1)$ com $a > 0$. Encontre o ponto onde o raio de curvatura atinge seu mínimo e forneça tal valor.

   Rpta: Raio de curvatura $\rho(t) = \frac{2}{\sqrt{a}} t^{3/2} (\frac{a}{t} + 1)^{3/2}$.

8. Seja $\mathcal{C}$ uma curva no plano XY, descrito em coordenadas polares $r = e^{\theta}$. Calcule o circulo osculador, indicando o centro e o raio, quando o vetor normal é paralelo a $(-1, 1)$.

   Rpta: Raio$= \sqrt{2}$ e centro$= (0, 1)$.

9. Seja $\mathcal{C}$ uma curva em $\mathbb{R}^3$, descrito por $\overrightarrow{\alpha}(t)$, $(t > 0)$. Se $\|\overrightarrow{\alpha}'(t)\| = \frac{1}{t+1}$, $\overrightarrow{B}'(t) = \frac{1}{(1+t)^2}(-1, -1, \frac{1-t}{\sqrt{2t}})$, $(t > 0)$ e a torção $\tau(t)$ é positiva. Calcule a torção.

   Rpta: $\tau(t) = \sqrt{2t}$.

10. O pulo de uma rã é descrita por $\overrightarrow{\alpha}(t) = (t^2, |t|)$. Calcule o distância percorrida pela rã no intervalo $t \in [-1, 1]$. Também calcule a curvatura no ponto $(1/2, \sqrt{2}2)$.

    Rpta: Distância: $\sqrt{5} + \ln(\sqrt{5} + 2)$ e Curvatura: $2\sqrt{5}/15$.